

控制体有限元方法中的一种高阶插值格式

西安交通大学 王 旭** 谷传纲

【摘要】 针对控制体有限元方法对流动方向不平行于坐标轴方向的回流问题数值模拟采用各种迎风格式都容易产生假扩散的问题, 本文给出了一种由插值单元及其迎风相邻单元所确定的高阶插值格式。通过对 $Re=1000$ 时三种不同形状的二维四边形空穴流模拟, 表明该格式与局部斜迎风格式的适当组合可有效地减小控制体有限元方法对回流问题数值模拟的假扩散。

主题词: 有限元 插值法 流动
分类号: O357

控制体有限元方法 (CVFEM) 是用于流动与传热问题数值模拟的有效方法, 便于引入迎风格式及采用速—压同位网格的原始变量法, 适用于各种复杂几何域^[1]。但当流动方向与坐标轴方向不一致且网格 Reynolds 数较大时, 各种迎风格式仍会产生严重的假扩散。本文给出控制体有限元方法在二维三角形单元网格域上的一种高阶插值格式, 并通过对 $Re=1000$ 时, 三种几何形状上二维空穴流的模拟验证该方法对回流问题的适用性。

1 控制方程及其控制体有限元方法

设稳态的粘性不可压流体流动的控制方程为:

动量方程 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} u_i - \mu \nabla u_i) = S_i - \partial p / \partial x_i$ (1)

连续性方程 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ (2)

其中: ρ 为流体密度, μ 为粘性或扩散系数, S_i 为源项。

连接三角形单元网格域上每一单元的形心点与边中点, 对每一结点 P 构成一个控制体 V_P 。在 V_P 上对方程 (1) 和 (2) 积分得:

$$\int_{S_P} (\rho \mathbf{v} u_i - \mu \nabla u_i) \cdot \mathbf{n} ds = \int_P \left(S_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dV \quad (3)$$

$$\int_{S_P} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (4)$$

其中 δS_P 为 V_P 界面, $\mathbf{n}$ 为 δS_P 上微元 ds 的单位外法向量。

对 (3) 式中的扩散项变量采用多项式插值, 对流项变量采用局部斜迎风插值及高阶插值。

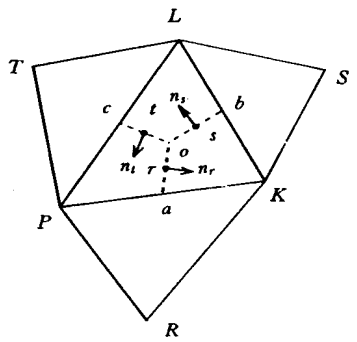


图 1 插值单元上的子控制面及其相邻单元

1998 年 6 月收稿, 1998 年 9 月收到修改稿。
** 男 41 岁 西安交通大学 710049

局部斜迎风格式: 如图 1 所示, 定义质量流率为:

$$\dot{m}_r = \int_{\delta S^r} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = (\rho \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_r) \delta S^r \quad (5)$$

其中: δS^r 表示子控制面 $\overline{ao}$ 的面积 (长度), $\mathbf{n}$ 为按图 1 规定的单位法向量。

设 $\dot{m}_r > 0$, 依据过 r 且平行于 $\mathbf{v}_r$ 的直线与线段 $\overline{Pa}$, $\overline{Pc}$ 和 $\overline{co}$ 的交点 w 定义对流项变量 $\varnothing_r^c$:

$$\varnothing_r^c = \begin{cases} (1/2)(1 + l_{\overline{wa}}/l_{\overline{Pa}})\varnothing_P + (1/2)(1 - l_{\overline{wa}}/l_{\overline{Pa}})\varnothing_K & \text{当 } w \text{ 在 } \overline{Pa} \text{ 上时} \\ (1/2)(1 + l_{\overline{wc}}/l_{\overline{Pc}})\varnothing_P + (1/2)(1 - l_{\overline{wc}}/l_{\overline{Pc}})\varnothing_L & \text{当 } w \text{ 在 } \overline{Pc} \text{ 上时} \\ (l_{\overline{wc}}/l_{\overline{c}})\varnothing_i^c + (1/2)(1 - l_{\overline{wc}}/l_{\overline{c}})(\varnothing_P + \varnothing_L) & \text{当 } w \text{ 在 } \overline{ct} \text{ 上时} \\ (l_{\overline{wo}}/l_{\overline{o}})\varnothing_i^c + (1/3)(1 - l_{\overline{wo}}/l_{\overline{o}})(\varnothing_P + \varnothing_K + \varnothing_L) & \text{当 } w \text{ 在 } \overline{to} \text{ 上时} \end{cases} \quad (6)$$

其中: l 表示相应线段的长度。对于 $\dot{m}_r < 0$ 及 $\varnothing_s^c$ 和 $\varnothing_i^c$ 可作类似定义, 于是得到:

$$[\varnothing^c]_{3 \times 1} = [A^{-1}]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 3} [\varnothing]_{3 \times 1} \quad (7)$$

高阶插值格式: 如图 1 所示, 若 $\dot{m}_r > 0$, 当交点 w 在 $\overline{co}$ 上时, 近似地将迎风点取在 c 点, 于是 r 上的迎风点便限定在 $\overline{Pa}$ 和 $\overline{Pc}$ 上。若 $\dot{m}_r < 0$, r 上的迎风点同理地限定在 $\overline{aK}$ 和 $\overline{Kb}$ 上。这样 r , s 和 t 上的迎风点便分别地限定在单元边 $\overline{PK}$, $\overline{KL}$ 和 $\overline{LP}$ 上。依据迎风点 w 在 $\overline{PK}$, $\overline{KL}$ 和 $\overline{LP}$ 上的情形, 由 PKL 与 PRK , KSL 和 LTP 分别构成四边形单元 $PRKL$, $PKSL$ 和 $PKLT$ 。在四边形单元上采用双线性多项式插值, 并采用 $L-U$ 分解法对系数矩阵求逆得到:

$$\varnothing = (1, x_w, y_w, x_w y_w) [M^{-1}]_{4 \times 4} [\varnothing_i] = N_i \varnothing_i \quad (8)$$

组合插值格式: 为保证迭代的收敛性与精确性, 用式 (7) 与式 (8) 构成组合格式:

$$\varnothing = \varnothing^U + \alpha(\varnothing^P - \varnothing^U) \quad (9)$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。 $\alpha = 0$ 对应于式 (7) 确定的迎风格式; $\alpha = 1$ 对应于式 (8) 确定的多项式格式。在离散中, 将式 (8) 中 $\varnothing_i$ 在 R , S 和 T 点的值用上一迭代值代入并组装到方程的右端项中。

对控制方程的离散: 对式 (3) 中 u_i 按式 (9) 插值, 对压力梯度项仅在单元 PKL 上进行多项式插值, 得到动量离散化方程:

$$a_p^u(u_i)_P = \sum a_{nb}^u(u_i)_{nb} + \lambda_p^u p_P + \sum \lambda_{nb}^u p_{nb} + b_P \quad (10)$$

以 $(-\partial p / \partial x_i)_{V_P}$ 表示 $-\partial p / \partial x_i$ 在 V_P 上的平均值, 进而将式 (10) 表示为:

$$(u_i)_P = \frac{1}{a_p} \left(\sum a_{nb}^u(u_i)_{nb} + b_P \right) + \frac{\Delta V_P}{a_p^u} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{V_P} \quad (11)$$

其中: ΔV_P 表示控制体 V_P 的体 (面) 积。将式 (11) 代入式 (4), 并用单元积分点上的压力梯度替代其中的 $(-\partial p / \partial x_i)_{V_P}$, 得到压力离散化方程:

$$c_P p_P = \sum c_{nb} p_{nb} + d_P \quad (12)$$

式 (12) 将结点 P 上的压力与其所有邻点压力联系起来, 避免了棋盘式压力场的产生。

2 算例与结论

对于流动方向平行于坐标轴的流动问题, 插值格式 (9) 中 α ($0 \leq \alpha \leq 1$) 对于计算结果没有明显的影响, 但对于回流问题, 其结果明显不同。本文仅

通过 $Re = 1000$ 的二维空穴流问题对插值格式 (9) 予以验证。计算域及其边界条件如图 2 所

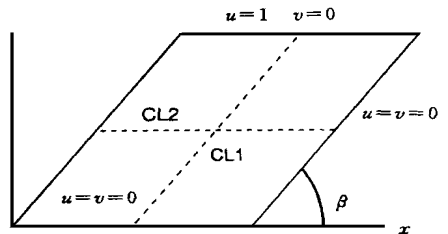


图 2 空穴流的几何域及其边界条件

示, 采用 41×41 的均匀网格。计算步骤按 SIMPLER 方法进行, 对式 (10) 采用逐行法, 对式 (12) 采用波前法。图 3 给出了 $CL1$ 及 $CL2$ 上的计算结果及其比较^[2,3], 图 4 给出了按格式 (9) 得到的全场流线分布, 其流动特性与文献 [2, 3] 中的结果基本一致。

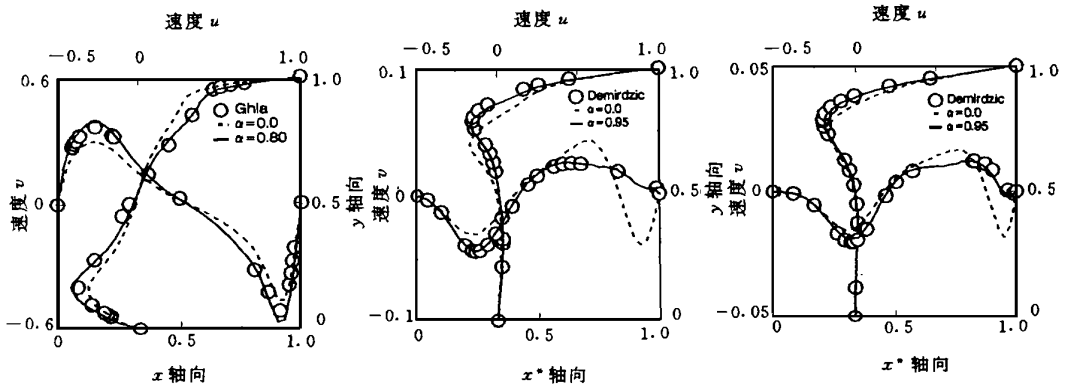


图 3 $CL1$ 和 $CL2$ 上 u 和 v 的计算结果及其比较

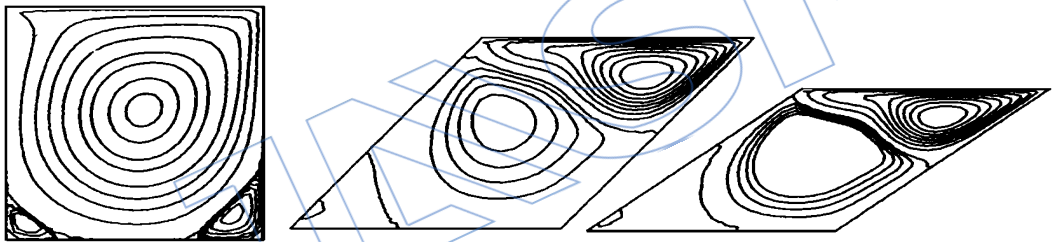


图 4 流线分布

从图 3 和图 4 可以看出: 采用组合格式 (9) 较之纯迎风格式 (7) 对计算结果有明显改善, 尤其对于 $\beta=45$ 与 $\beta=30$ 的情形, 由格式 (9) 所得到的结果基本达到文献 [3] 按有限体积法在 320×320 个控制体网格上所得到的精确解。从图 3 还可看出, 流动方向与坐标轴方向的夹角 β 越大, 则纯迎风格的假扩散越严重, 这时更需采用高阶格式。在计算中, 可通过逐渐增大比例因子 α 的反复计算克服因式 (9) 减小迎风格式比例对收敛性所造成的影响。计算结果表明, 在满足收敛的前提下, α 越大, 其精度越高。

参 考 文 献

- 1 Saabas H J, Baliga B R. Co- Located Equal- Order Control- Volume Finite- Element Method for Multidimensional, Incompressible, Fluid Flow- Part I: Formulation. Numer. Heat Transfer, 1994, Part B, 26: 381- 407
- 2 Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High- Re Solutions for incompressible Flow Using the Navier- Stokes Equations and a Multigrid Method. J. Comput. Phys., 1982, 48: 387- 411
- 3 Demirdzic I, Lilek Z, Peric M. Fluid Flow and Heat Transfer Test problems for Non- Orthogonal Grids: Bench- Mark Solutions. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 1992, 15: 329- 354

and from stagnation on the half- cylinder leading edge. The holes in each row were spaced three hole- diameters apart at angles to the surface spanwise and streamwise respectively. The length of hole is of four hole- diameters. Spanwise and streamwise distributions of film cooling effectiveness in the leading edge and on the flat side- wall were measured in the range of mainstream Reynolds number (based on leading edge diameter) from 42000 to 127000 and blowing ratio (average secondary to mainstream mass flux ratio) from 0.8 to 2.0. The results indicate that the film cooling effectiveness decreases with increasing blowing ratio but does not depend too much on the mainstream Reynolds number. The secondary flow locus is dependent on blowing ratio but also does not depend on mainstream Reynolds number too much.

Key Words Airfilm cooling blades Efficiency Experiments

HIGH- ORDER INTERPOLATION SCHEME OF CVFEM

Wang Xue and Yan Chuanjun

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

ABSTRACT Even though all upwind schemes of Control- Volume Finite- Element Method (CVFEM) enhance the accuracy for simulation of advection- dominated fluid flows, but lead to severe false diffusion for flows oblique or skew to the axis direction. A high- order polynomial interpolation scheme is proposed, based on the locally skewed upwind scheme and an upwind neighbor element of the interpolated element. The numerical tests of lid- driven cavity flow in three different geometric fields for $Re=1000$, and with 41×41 uniform grids, proved that the proposed high- order scheme can almost achieve the benchmark solutions that previous researchers obtained with much more refined grids.

Key Words Finite elements Interpolation method flow

AEROELASTIC OPTIMIZATION OF A HELICOPTER ROTOR WITH SINGLE- CELL COMPOSITE BLADES FOR VIBRATION REDUCTION

Xiang Jinwu and Zhang Xiaogu

(5th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT An unsteady aerodynamic environment and highly flexible rotating blades lead to harmonic loadings on the rotor so as to cause high vibration in the helicopter. An optimization is carried out for a four- bladed, soft in- plane hingeless rotor consisting of a single- cell composite box- beam spar for helicopter vibration reduction. The design variables are the ply angles of the box- beam walls; the objective function is of the vibration hub loads. Constraints are imposed on blade rotating frequencies and aeroelastic stability. As compared to the initial design, the optimum solution results in a 20- 70% reduction of the 4/rev hub loads.

Key Words Rotor blades Aeroelasticity optimization Vibration reduction